UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Kedua
Sidang Akademik 2003/2004

Februari / Mac 2004

MAT 517 ALJABAR LINEAR PENGKOMPUTERAN DAN PENGHAMPIRAN FUNGSI

Masa: [3 jam]

ARAHAN KEPADA CALON:

Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi **EMPAT [4]** soalan di dalam **TUJUH [7]** halaman yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.

Jawab **SEMUA** soalan.

1. Pertimbangkan matriks A berikut,

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

(i) Sahkan bahawa matriks A di atas ialah matriks tentu positif.

(ii) Prosedur berikut menghuraikan kaedah pemfaktoran sesuatu matriks $n \times n, A = (a_{ij})$ yang tentu positif kepada bentuk LDL^T di mana $L = (l_{ij})$ ialah matriks segitiga bawah dengan pemasukan 1 pada pepenjuru utamanya dan $D = (d_{ij})$ ialah matriks pepenjuru dengan pemasukan pepenjuru yang positif:

Gunakan langkah-langkah berikut untuk mendapatkan pemasukan-pemasukan matriks L ***(***l_{ij}, $i = 1,\ldots,n$ $\quad j = 1,\ldots,n$***) dan pemasukan pepenjuru matriks*** D ***(***d_i, $i = 1,\ldots,n$***)***

I. ***Untuk*** $i = 1,\ldots,n$, ***set*** $l_{ii} = 1$;
$d_1 = a_{11}$;
$l_{21} = \dfrac{a_{21}}{d_1}$.

II. ***Untuk*** $i = 2,\ldots,n$, ***ulang langkah III hingga V:***

III. ***Untuk*** $j = 1,\ldots i-1$, ***set*** $v_j = l_{ij} d_j$

IV. ***Set*** $d_i = a_{ii} - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij} v_j$

V. ***Untuk*** $j = i+1,\ldots,n$, ***set*** $l_{ji} = \left(a_{ji} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{jk} v_k \right) \Big/ d_i$

Berpandukan prosedur ini, ATAU cara lain, faktorkan matriks A kepada bentuk LDL^T.

(iii) Pertimbangkan pengubahsuaian prosedur pemfaktoran LDL^T yang diberikan dalam bahagian (ii) untuk menyelesaikan sistem linear $n \times n$ dalam bentuk $Ax = b$ di mana A ialah matriks tentu positif. Tunjukkan bahawa pengubahsuaian ini memerlukan anda menyelesaikan tiga persamaan linear berikut, $Ly = b$, $Dz = y$ dan $L^T x = z$. Tentukan juga bilangan operasi darab, bahagi, campur dan tolak yang terlibat dalam penyelesaian ketiga-tiga sistem linear ini.

(iv) Gunakan prosedur dari bahagian (ii) di atas untuk menyelesaikan sistem persamaan linear berikut

$$\begin{aligned} 2x &+ y &= 5 \\ x &+ 3y &= 20 \end{aligned}$$

[100 markah]

2. (i) Tunjukkan bahawa jika matriks $n \times n$ A bersimetri dan tentu positif, dua syarat berikut dipenuhi,

I. $\langle \underline{x}, A\underline{x} \rangle > 0$ melainkan apabila $\underline{x} = \underline{0}$;

II. $\langle \underline{x}, A\underline{y} \rangle = \langle A\underline{x}, \underline{y} \rangle$

(CATATAN: $\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle = \underline{x}^T \underline{y}$ mewakili hasil darab terkedalam vektor $\underline{x}$ dan $\underline{y}$).

(ii) Biar

$$A = \begin{bmatrix} 9 & 3 & 0 \\ 3 & 9 & -4 \\ 0 & -4 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\underline{v}^{(1)} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \underline{v}^{(2)} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \underline{v}^{(3)} = \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Tunjukkan bahawa set $\{\underline{v}^{(1)}, \underline{v}^{(2)}, \underline{v}^{(3)}\}$ ialah set berortogon- A.

(iii) Pertimbangkan sistem linear berikut

$$\begin{aligned} 9x_1 + 3x_2 \qquad\quad &= 84 \\ 3x_1 + 9x_2 - 4x_3 &= 56 \\ -4x_2 + 9x_3 &= -7 \end{aligned}$$

Cari penghampiran penyelesaian sistem linear di atas menggunakan kaedah lelaran $\underline{x}^{(k)} = \underline{x}^{(k-1)} + t_k \underline{v}^{(k)}$ di mana

$$t_k = \frac{\langle \underline{v}^{(k)}, \underline{b} - A\underline{x}^{(k-1)} \rangle}{\langle \underline{v}^{(k)}, A\underline{v}^{(k)} \rangle}$$

dan $\underline{v}^{(k)}$, $k=1,2,3$ ialah vektor yang diberikan dalam bahagian (ii). Mulakan lelaran dengan $\underline{x}^{(0)}=(1,1,1)^T$ dan janakan $\underline{x}^{(1)}$, $\underline{x}^{(2)}$ dan $\underline{x}^{(3)}$. Gunakan aritmetik tepat dalam pengiraan anda.

(iv) Tunjukkan bahawa $\underline{x}^{(3)}$ ialah penyelesaian sebenar sistem ini.

[100 markah]

3. Pertimbangkan matriks A dalam bentuk tiga pepenjuru berikut,

$$A=\begin{bmatrix} a_1 & b_2 & 0 & \cdots & 0 \\ b_2 & a_2 & b_3 & \ddots & \vdots \\ 0 & b_3 & a_3 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & b_n \\ 0 & \cdots & 0 & b_n & a_n \end{bmatrix}$$

(i) Jika A difaktorkan secara rekursif supaya, untuk setiap $i=1,2,\ldots,$ $A^{(i)}=Q^{(i)}R^{(i)}$ dan $A^{(i+1)}=R^{(i)}Q^{(i)}$, dengan $Q^{(i)}$ matriks berortogon dan $R^{(i)}$ matriks segitiga atas, tunjukkan bahawa $A^{(i)}$ dan $A^{(i+1)}$ adalah matriks serupa, atau dalam perkataan lain, kedua-duanya mempunyai nilai eigen yang sama.

(PETUNJUK: Matriks Q dikatakan berortogon jika $Q^T=Q^{-1}$).

(ii) Matriks $R^{(i)}$ daripada bahagian (i) di atas diperoleh dengan mendarabkan matriks $A^{(i)}$ dengan matriks-matriks putaran P_k, $k=2,\ldots,n$ supaya

$$R^{(i)}=P_nP_{n-1}\ldots P_2A^{(i)}.$$

P_k ditakrifkan seperti berikut,

$$\begin{array}{ccl} P_k=\left[\begin{array}{c:ccc:c} I_{k-1} & & O & & O \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & c_{k+1} & & s_{k+1} & \\ O & & & & O \\ & -s_{k+1} & & c_{k+1} & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ O & & O & & I_{n-k-1} \end{array}\right] & \begin{array}{c} \\ \\ \longleftarrow \text{Baris ke-}k \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \\ \uparrow & \\ \text{Lajur ke-}k & \end{array}$$

dengan $s_{k+1} = \dfrac{b_{k+1}}{\sqrt{{b_{k+1}}^2 + {x_k}^2}}$ dan $c_{k+1} = \dfrac{x_k}{\sqrt{{b_{k+1}}^2 + {x_k}^2}}$, di mana x_k ialah pemasukan baris ke-k dan lajur ke-k matriks ${A_k}^{(i)}$ dan b_{k+1} ialah pemasukan baris ke-$k+1$ dan lajur ke-k matriks yang sama. (CATATAN: ${A_k}^{(i)} = P_k {A_{k-1}}^{(i)}$, $k = 2,\ldots,n$, dengan ${A_1}^{(i)} = A^{(i)}$).

(a) Tunjukkan bahawa setiap P_k, $k = 2,\ldots,n$ ialah matriks berortogon.

(b) Tunjukkan, jika $Q^{(i)} = {P_2}^T {P_3}^T \ldots {P_n}^T$, maka $A^{(i)} = Q^{(i)} R^{(i)}$. Tunjukkan juga bahawa $Q^{(i)}$ ialah matriks berortogon.

(iii) Biar

$$A = A^{(1)} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix},$$

Tentukan matriks $R^{(1)}$ dan $Q^{(1)}$ menggunakan kaedah yang dihuraikan dalam bahagian (ii) di atas.

(iv) Tentukan $A^{(2)}$ menggunakan keputusan daripada bahagian (iii). Gunakan aritmetik 3 digit dengan pembundaran untuk menjalankan pengiraan anda. Berdasarkan $A^{(2)}$, tentukan penghampiran nilai eigen matriks A.

(v) Nilai eigen A yang sebenar (tepat kepada 3 digit) ialah 7.87, 1.49 dan -1.36. Bincangkan kadar penumpuan kaedah ini berdasarkan penghampiran yang diperolehi.

[100 markah]

4. Prosedur Gram-Schmidt untuk mencari set fungsi polinomial yang berortogon $\{\phi_0, \phi_1, \ldots, \phi_n\}$ berdasarkan fungsi pemberat $w(x)$ diberikan seperti berikut:

$$\phi_0(x) = 1, \qquad \phi_1(x) = x - B_1, \quad \text{untuk setiap } x \text{ dalam } [a,b],$$

dengan

$$B_1 = \frac{\int_a^b x w(x) [\phi_0(x)]^2 \, dx}{\int_a^b w(x) [\phi_0(x)]^2 \, dx},$$

dan untuk $k \geq 2$,

$$\phi_k(x) = (x - B_k)\phi_{k-1}(x) - C_k\phi_{k-2}(x), \text{ untuk setiap } x \text{ dalam } [a,b],$$

di mana

$$B_k = \frac{\int_a^b xw(x)[\phi_{k-1}(x)]^2 dx}{\int_a^b w(x)[\phi_{k-1}(x)]^2 dx} \quad \text{dan} \quad C_k = \frac{\int_a^b xw(x)\phi_{k-1}(x)\phi_{k-2}(x)dx}{\int_a^b w(x)[\phi_{k-2}(x)]^2 dx}.$$

(i) Tunjukkan bahawa, berdasarkan fungsi pemberat $w(x) = e^{-x}$ dan $\phi_0(x) = 1$, prosedur Gram-Schmidt di atas menghasilkan fungsi ϕ_1 dan ϕ_2 dalam bentuk berikut,

$$\phi_1(x) = x - 1, \qquad \phi_2(x) = x^2 - 4x + 2,$$

untuk setiap x dalam $(0,\infty)$.

(ii) Sahkan bahawa $\{\phi_0, \phi_1, \phi_2\}$ ialah set berortogon berdasarkan fungsi pemberat $w(x) = e^{-x}$.

(iii) Pertimbangkan masalah mencari penghampiran polinomial kuasa dua terkecil berdarjah n untuk suatu fungsi $f \in C(0,\infty)$ dalam bentuk

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k\phi_k(x)$$

supaya ralat kuasa dua berikut diminimumkan,

$$E(a_0,\ldots,a_n) = \int_0^\infty w(x)[f(x) - P(x)]^2 dx.$$

Tunjukkan bahawa, untuk fungsi pemberat $w(x) = e^{-x}$ dan set fungsi berortogon $\{\phi_0, \phi_1, \phi_2\}$ yang diperoleh dalam bahagian (i) di atas, pekali a_0, a_1 dan a_2 diberikan seperti berikut,

$$a_0 = \int_0^\infty w(x)f(x)\phi_0(x)dx;$$

$$a_1 = \int_0^\infty w(x)f(x)\phi_1(x)dx$$

$$a_2 = \frac{1}{4}\int_0^\infty w(x)f(x)\phi_2(x)dx$$

(iv) Gunakan keputusan daripada bahagian (iii) untuk mencari penghampiran polinomial kuasa dua terkecil berdarjah 2 untuk $f(x) = e^{-2x}$.

[100 markah]

-oo0oo-